UAM-Cuajimalpa,
DCSH, Departamento de Humanidades
2022-P

LÓGICA
Guía para el exámen de recuperación

Contenido

Temario 1

Aspectos básicos de la lógica proposicional 3

Aspectos básicos de la lógica de predicados 9

Ejercicios resueltos de lógica proposicional 13

Ejercicios resueltos de lógica de predicados 17

Bibliografía 19

Temario

INTRODUCCIÓN
1. ¿Qué es la lógica?
2. Verdad y validez lógica
3. La forma lógica de los argumentos
4. El lenguaje formal

<u>I. LÓGICA PROPOSICIONAL</u>

1) EL LENGUAJE DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL
1. Operadores y letras proposicionales
2. Uso y mención. Lenguaje objeto y metalenguaje.
3. Deducción natural.
   - 3.1. Supuestos y premisas
   - 3.2. Reglas para condicionales y negación
   - 3.3. Reglas de conjunción y disyunción
   - 3.4. La reducción al absurdo
   - 3.5. Fórmulas bien formadas
4. Formalización de argumentos

2) LA SEMÁNTICA VERITATIVO-FUNCIONAL
1. Interpretación y reglas de valoración.
2. Tablas de verdad
3. La implicación como consecuencia lógica
4. Satisfacibilidad y validez veritativo-funcional
5. Condicional e implicación; bicondicional y equivalencia

II. LÓGICA DE PREDICADOS

1) EL LENGUAJE DE LA LÓGICA DE PREDICADOS
1. Nombres, predicados y relaciones
2. Cuantificadores y variables
3. Silogística
4. Formalización

2) DEDUCCIÓN NATURAL EN LÓGICA DE PREDICADOS
1. Eliminación del cuantificador universal
2. Introducción del cuantificador universal
3. Introducción del cuantificador existencial
4. Eliminación del cuantificador existencial
5. Cuantificadores y conectivas
6. Cuantificación múltiple y predicados poliádicos

Aspectos básicos de la lógica proposicional

VERDAD Y VALIDEZ

Supongamos que existe una persona llamada Ximena, de nacionalidad peruana. Considérense a continuación los siguientes argumentos:

Ximena es mexicana.
Los mexicanos son latinoamericanos.
Por tanto, Ximena es latinoamericana.

Ximena es mexicana.
Los mexicanos son peruanos.
Por tanto, Ximena es peruana.

Ximena es mexicana.
Los mexicanos son colombianos.
Por tanto, Ximena es colombiana.

El primero de ellos tiene una premisa falsa, si bien su conclusión es verdadera; en el segundo todas las premisas son falsas, pero su conclusión es verdadera; mientras que en el tercero tanto las premisas como la conclusión son falsas. No obstante, desde un punto de vista lógico, todos ellos son argumentos válidos, es decir, si fueran verdaderas sus premisas, también lo sería su conclusión. En consecuencia, la lógica no se ocupa de establecer la verdad o falsedad de las premisas, sino de asegurar que si las premisas son verdaderas, también lo habrá de ser la conclusión, o dicho de otro modo: la lógica garantiza la validez de los argumentos.

SIMBOLOGÍA Y CONCEPTOS BÁSICOS DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Las **letras proposicionales** simbolizan los enunciados que integran un argumento:

p, q, r, s…

Las **conectivas lógicas** simbolizan los operadores proposicionales, y en ellas recae la forma lógica de los argumentos:

- **Negación** (no): $\neg$
- **Condicional** (si…, entonces): $\rightarrow$
- **Conjunción** (se da… y se da…): $\wedge$
- **Disyunción** (o se da… o se da…): $\vee$

El **signo de deducción** $\vdash$ expresa la implicación lógica, es decir, “por tanto”, “en consecuencia”.

Se define el **supuesto** como una proposición que no se deriva de ningún argumento previo, sino que se asume verdadera en dependencia de sí misma.

Se define la **premisa** como la proposición utilizada en un cierto paso del cálculo lógico para alcanzar una conclusión.

La **conclusión** es el resultado final del cálculo lógico, y dependerá de los supuestos de que dependan las premisas utilizadas.

FORMA LÓGICA Y FORMALIZACIÓN DE ARGUMENTOS

- **Argumentos con la misma forma lógica**

Compárense los siguientes argumentos:

Si a Ximena le gustara leer, tendría libros en casa.
No tiene libros en casa.
Luego, no le gusta leer.

Si hubiera llovido, la calle estaría mojada.
La calle no está mojada.
Luego, no ha llovido.

Nótese que ambos argumentos comparten la misma estructura lógica:

Si se diera A, entonces se daría B
No se da B.
Luego, no se da A.

A esta estructura o esquema común la denominamos **forma lógica**.

La identificación de la forma lógica nos permite formalizar argumentos. Utilizando la simbología definida en el apartado anterior, podríamos formalizar estos argumentos del siguiente modo:

$$p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$$

Se lee así: "si de da p entonces se da q, no se da q, por tanto no se da p".

REGLAS BÁSICAS DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

- **Regla de supuestos (S)**

Establece que una premisa cualquiera puede introducirse en un paso del cálculo lógico en calidad de supuesto, y por tanto en dependencia exclusiva de dicho paso.

$$A \vdash A$$

Ejemplo

$p \vdash p$

1 (1) p s

- ***Modus ponendo ponens*** **(MP)**

Si en un cálculo lógico nos vienen dadas como premisas un condicional $A \rightarrow B$ junto con la afirmación de su antecedente *A*, entonces cabe concluir el consecuente *B* en dependencia de los supuestos de que dependan ambas premisas.

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash A \rightarrow B \\ \Delta \vdash A\end{array}}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Ejemplo

$p \rightarrow q, p \vdash q$

1	(1) $p \rightarrow q$	s
2	(2) p	s
1, 2	(3) q	MP 1, 2

- ***Modus tollendo tollens*** **(MT)**

Si en un cálculo lógico nos vienen dadas como premisas un condicional $A \rightarrow B$ junto con la negación de su consecuente $\neg B$, entonces cabe concluir la negación del antecedente $\neg A$ en depedencia de los supuestos de que dependan ambas premisas.

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash A \rightarrow B \\ \Delta \vdash \neg B\end{array}}{\Gamma, \Delta \vdash \neg A}$$

Ejemplo

$p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$

1 (1) $p \to q$ s
2 (2) $\neg q$ s
1, 2 (3) $\neg p$ MT 1, 2

- **<u>Doble negación</u> (DN)**

Si en un cálculo lógico nos viene dada A como premisa, entonces cabe introducir como conclusión su doble negación $\neg\neg A$ en dependencia de los mismos supuestos que la premisa. Esta regla también se aplica al caso contrario.

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg\neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Ejemplos

$p \vdash \neg\neg p$

1 (1) p s
1 (2) $\neg\neg p$ DN 1

$p \to \neg q, q \vdash \neg p$

1 (1) $p \to \neg q$ s
2 (2) q s
2 (3) $\neg\neg q$ DN 2
1, 2 (4) $\neg p$ MT 1, 3

- **<u>Prueba condicional</u> (PC)**

Si en un cálculo lógico obtenemos B como conclusión derivada de un supuesto A (quizá junto con otros supuestos), entonces cabe derivar $A \to B$ en dependencia de los restantes supuestos (en el caso de que los haya).

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Ejemplo

$p \to q \vdash \neg q \to \neg p$

1 (1) $p \to q$ s
2 (2) $\neg q$ s
1, 2 (3) $\neg p$ MT 1, 2
1 (4) $\neg q \to \neg p$ PC 2, 3

- **<u>Introducción de la conjunción</u> (I$\wedge$)**

Si A y B nos vienen dadas como premisas, entonces cabe introducir $A \wedge B$ como conclusión en dependencia de todos los supuestos de ambas premisas.

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash A \\ \Delta \vdash B\end{array}}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B}$$

Ejemplo

$p, q \vdash p \wedge q$

1	(1)	p	s
2	(2)	q	s
1, 2	(3)	$p \wedge q$	I$\wedge$ 1, 2

- **<u>Eliminación de la conjunción</u> (E$\wedge$)**

Si nos viene dada la premisa $A \wedge B$, entonces cabe introducir como conclusión tanto A como B en dependencia de los mismos supuestos que dicha premisa.

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

Ejemplos

$p \wedge q \vdash p$

1	(1)	$p \wedge q$	s
1	(2)	p	E$\wedge$ 1

$p \wedge q \vdash q$

1	(1)	$p \wedge q$	s
1	(2)	q	E$\wedge$ 1

Aspectos básicos de la lógica de predicados

SIMBOLOGÍA Y CONCEPTOS BÁSICOS DE LA LÓGICA DE PREDICADOS

La lógica de predicados introduce un nuevo modo de formalizar argumentos a partir de la identificación de *objetos* y *propiedades*. Mientras que los objetos se refieren por *nombres*, las propiedades de dichos objetos se designan como *predicados*. Este planteamiento conlleva la introducción de una nueva simbología, pues a diferencia de la lógica proposicional, que analizaba proposiciones enteras, la lógica de predicados va a estar en condiciones de analizar el contenido de los enunciados.

Los objetos individuales suelen referirse por las primeras letras del alfabeto en minúsculas, y usualmente se las conoce como *constantes*: *a*, *b*, *c*… En cambio, las propiedades de dichos objetos suelen designarse por letras mayúsculas a partir de la F, en general conocidas como *letras predicativas*: *F*, *G*, *H*… De este modo, la expresión "el objeto *a* tiene la propiedad *F*", la simbolizamos como *Fa*. Si queremos decir, por ejemplo, que "el objeto *b* no tiene la propiedad *H*", lo formalizamos como $\neg Hb$.

En el caso de que tengamos un conjunto de objetos pertenecientes a un cierto dominio de definición, podemos introducir *variables* que simbolizan cualquiera de dichos objetos, comúnmente mediante las letras finales del alfabeto en minúsculas, como por ejemplo *x*, *y*, *z*. Si, pongamos por caso, nos referimos a las "almas de la cristiandad", con las constantes nos referiríamos a las almas de los sujetos individuales, por ejemplo, el alma *a*, el alma *b*, etc. Mientras que un alma cualquiera la designaríamos como *x*, es decir, "un alma *x*" sin especificar a qué alma en concreto se refiere.

Las **constantes** simbolizan objetos:

a, b, c, d...

Las **variables** simbolizan los objetos que integran un cierto dominio de definición:

x, y, z…

Las **letras predicativas** simbolizan las propiedades atribuidas a los objetos o bien propiedades de las relaciones entre objetos:

F, G, H…

- **Cuantificador existencial y cuantificador universal**

La introducción de variables para designar a un objeto cualquiera dentro de un dominio de definición permite, a su vez, establecer dos nuevos operadores lógicos, el cuantificador existencial y el cuantificador universal. Si decimos, por ejemplo, que "el alma *a* va a ser salvada", *Sa*, también podemos afirmar que "existe un alma x que va a ser salvada", lo cual simbolizamos como $\exists x(Sx)$, en lenguaje natural se leería "existe un alma x tal que x tiene la propiedad de ser salvada". En cambio, si queremos decir que "todas las almas van a ser salvadas", lo formalizaríamos como $\forall x(Sx)$, que en lenguaje natural se leería "para cualquier alma x, x tiene la propiedad de ser salvada".

Esta estructura de análisis a partir de objetos, predicados y cuantificadores nos permite a su vez recuperar el lenguaje formal de la lógica proposicional. Si, por ejemplo, deseamos expresar el enunciado "Para cualquier alma x, si x ha sido buena (B) entonces x se va a salvar (S)", lo formalizaríamos del siguiente modo:

$$\forall x(Bx \rightarrow Sx)$$

De manera semejante, si deseamos formalizar un argumento complejo como este:

Todos los mexicanos son latinoamericanos
Algunos mexicanos son xalapenses.
Luego, algunos latinoamericanos son xalapenses

La formalización resultaría:

$$\forall x(Mx \rightarrow Lx),\ \exists x(Mx \wedge Jx) \vdash \exists x(Lx \wedge Jx)$$

En lenguaje natural se leería "Para todo x, si x tiene la propiedad de ser mexicano, entonces x es latinoamericano"; "existe un x que es mexicano y xalapense"; por tanto "existe un x que es latinoamericano y xalapense".

REGLAS BÁSICAS DE LA LÓGICA DE PREDICADOS

Además de las reglas básicas que definimos en el capítulo de lógica proposicional, la lógica de predicados introduce cuatro nuevas reglas para los cuantificadores.

- **<u>Eliminación del cuantificador universal</u>** (E$\forall$)

De una premisa universalmente cuantificada podemos establecer un caso concreto. Si dentro de un dominio de definición de una variable ω cualquier objeto tiene una propiedad *P*, entonces un cierto objeto *i* perteneciente al dominio de definición también tiene esa propiedad $P(i)$:

$$\frac{\Gamma \vdash \forall\omega\ P(\omega)}{\Gamma \vdash P(i)}$$

Ejemplo

$\forall x(Fx) \vdash Fa$

1 (1) $\forall x(Fx)$ s
1 (2) Fa (E$\forall$ 1)

- **<u>Introducción del cuantificador universal</u>** (I$\forall$)

Si dentro de un cierto dominio de definición cualquier objeto tiene una propiedad *P*, entonces podemos cuantificar universalmente dicho dominio mediante la variable ω, a condición de lo hagamos a partir un caso típico escogido arbitrariamente. Es decir, el caso típico no puede aparecer entre los supuestos de la conclusión:

$$\frac{\Gamma \vdash P(i)}{\Gamma \vdash \forall\omega\ P(\omega)}$$

Ejemplo

$\forall x(Fx \to Gx),\ \forall x(Fx) \vdash \forall x(Gx)$

1 (1) $\forall x(Fx \to Gx)$ s
2 (2) $\forall x(Fx)$ s
1 (3) $Fa \to Ga$ (E$\forall$ 1)
2 (4) Fa (E$\forall$ 2)
1, 2 (5) Ga MP 3,4
1, 2 (6) $\forall x(Gx)$ (I$\forall$ 5)

- **Introducción del cuantificador existencial** ($I\exists$)

Si un cierto objeto i tiene una propiedad P, entonces podemos cuantificar existencialmente dicho objeto mediante una variable omega ω que posee esa propiedad $\exists\omega\ P(\omega)$:

$$\frac{\Gamma \vdash P(i)}{\Gamma \vdash \exists\omega\ P(\omega)}$$

Ejemplo

$Fa \vdash \exists x(Fx)$

1 (1)	Fa	s
1 (2)	$\exists x(Fx)$	($I\exists$ 1)

- **Eliminación del cuantificador existencial** ($E\exists$)

Si tenemos un premisa cuantificada existencialmente y podemos derivar de ella una cierta conclusión C a partir un caso típico escogido arbitrariamente, entonces consideramos que hemos obtenido dicha conclusión de la premisa cuantificada existencialmente:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \exists\omega\ P(\omega)\\ \Delta, P(i) \vdash C\end{array}}{\Gamma, \Delta \vdash C}$$

Ejemplo

$\exists x(Fx \to Gx) \vdash \exists x(Fx) \to \exists x(Gx)$

1 (1)	$\exists x(Fx \to Gx)$	s
2 (2)	$\exists x(Fx)$	s
3 (3)	$Fa \to Ga$	s
4 (4)	Fa	s
3, 4 (5)	Ga	MP 3, 4
3, 4 (6)	$\exists x(Gx)$	($I\exists$ 5)
1, 4 (7)	$\exists x(Gx)$	($E\exists$ 1, 3, 6)
1, 2 (8)	$\exists x(Gx)$	($E\exists$ 2, 4, 7)
1 (9)	$\exists x(Fx) \to \exists x(Gx)$	(PC 2, 5)

Ejercicios resueltos de lógica proposicional

*) $p\to(q\to r), p, \neg r \vdash \neg q$

1	(1)	$p\to(q\to r)$	S
2	(2)	p	S
3	(3)	$\neg r$	S
1,2	(4)	$q\to r$	MP 1,2
1,2,3	(5)	$\neg q$	MT 4,3

*) $p\to q \vdash (\neg p\to\neg r)\to(r\to q)$

1	(1)	$p\to q$	S
2	(2)	$r\to p$	S
3	(3)	$\neg p$	S
2,3	(4)	$\neg r$	MT 2,3
2	(5)	$\neg p\to\neg r$	PC 3,4
6	(6)	r	S
2,6	(7)	p	MP 2,6
1,2,6	(8)	q	MP 1,7
1,2	(9)	$r\to q$	PC 6,8
1	(10)	$(\neg p\to\neg r)\to(r\to q)$	PC 5,9

*) $p\to q, q\to r, p \vdash r$

1	(1)	$p\to q$	S
2	(2)	$q\to r$	S
3	(3)	p	S
1,3	(4)	q	MP 1,3
1,2,3	(5)	r	MP 2,4

*) $p\to(p\to q), p \vdash q$

1	(1)	$p\to(p\to q)$	S
2	(2)	p	S
1,2	(3)	$p\to q$	MP 1,2
1,2	(4)	q	MP 2,3

*) $p\to(q\to r), \neg r, p \vdash \neg q$

1	(1)	$p\to(q\to r)$	S
2	(2)	$\neg r$	S
3	(3)	p	S
1,3	(4)	$q\to r$	MP 1,3
1,2,3	(5)	$\neg q$	MT 2,4

*) $p\to\neg\neg q, p \vdash q$

1	(1)	$p\to\neg\neg q$	S
2	(2)	p	S
1,2	(3)	$\neg\neg q$	MP 1,2
1,2	(4)	q	DN 3

*) $\neg\neg p\to q, \neg q \vdash \neg p$

1	(1)	$\neg\neg p\to q$	S

2 (2)	$\neg q$	S
1,2 (3)	$\neg\neg\neg p$	MT 1,2
1,2 (4)	$\neg p$	DN 3

*) $\neg p \rightarrow \neg q,\ q \vdash p$

1 (1)	$\neg p \rightarrow \neg q$	S
2 (2)	q	S
2 (3)	$\neg\neg q$	DN 2
1,2 (4)	$\neg\neg p$	MT 1,3
1,2 (5)	p	DN 4

*) $p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow \neg p$ (contraposición)

1 (1)	$p \rightarrow \neg q$	S
2 (2)	q	S
2 (3)	$\neg\neg q$	DN 2
1,2 (4)	$\neg p$	MT 1,3
1 (5)	$q \rightarrow \neg p$	PC 2,4

*) $\neg p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow p$ (contraposición)

1 (1)	$\neg p \rightarrow q$	S
2 (2)	$\neg q$	S
1,2 (3)	$\neg\neg p$	MT 1,2
1,2 (4)	p	DN 3
1 (5)	$\neg q \rightarrow p$	PC 2,4

*) $\neg p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow p$ (contraposición)

1 (1)	$\neg p \rightarrow \neg q$	S
2 (2)	q	S
2 (3)	$\neg\neg q$	DN 2
1,2 (4)	$\neg\neg p$	MT 1,3
1,2 (5)	p	DN 4
1 (6)	$q \rightarrow p$	PC 2,5

*) $p \rightarrow q,\ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$ (transitiva del condicional)

1 (1)	$p \rightarrow q$	S
2 (2)	$q \rightarrow r$	S
3 (3)	p	S
1,3 (4)	q	MP 1,3
1,2,3 (5)	r	MP 2,4
1,2 (6)	$p \rightarrow r$	PC 3,5

*) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash q \rightarrow (p \rightarrow r)$ (mutación de premisa)

1 (1)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	S
2 (2)	p	S
1,2 (3)	$q \rightarrow r$	MP 1,2
4 (4)	q	S
1,2,4 (5)	r	MP 3,4
1,4 (6)	$p \rightarrow r$	PC 2,5
1 (7)	$q \rightarrow (p \rightarrow r)$	PC 4,6

*) $p\to(q\to r) \vdash (p\to q)\to(p\to r)$ (distributiva del condicional en condicional)

1 (1)	$p\to(q\to r)$	S
2 (2)	$p\to q$	S
3(3)	p	S
1,3 (4)	$q\to r$	MP 1,3
2,3 (5)	q	MP 2,3
1,2,3 (6)	r	MP 4,5
1,2 (7)	$p\to r$	PC 3,6
1 (8)	$(p\to q)\to(p\to r)$	PC 2,7

*) $p\to[q\to(r\to s)] \vdash r\to[p\to(q\to s)]$

1 (1)	$p\to[q\to(r\to s)]$	S
2 (2)	p	S
1,2 (3)	$q\to(r\to s)$	MP 1,2
4 (4)	q	S
1,2,4 (5)	$r\to s$	MP 3,4
6 (6)	r	S
1,2,4,6 (7)	s	MP 5,6
1,2,6 (8)	$q\to s$	PC 4,7
1,6 (9)	$p\to(q\to s)$	PC 2,8
1 (10)	$r\to[p\to(q\to s)]$	PC 6,9

*) $p\to q \vdash (q\to r)\to(p\to r)$

1 (1)	$p\to q$	S
2 (2)	$q\to r$	S
3 (3)	p	S
1,3 (4)	q	MP 1,3
1,2,3 (5)	r	MP 2,4
1,2 (6)	$p\to r$	PC 3,5
1 (7)	$(q\to r)\to(p\to r)$	PC 2,6

*) $p \vdash (p\to q)\to q$

1 (1)	p	S
2 (2)	$p\to q$	S
1,2 (3)	q	MP 1,2
1 (4)	$(p\to q)\to q$	PC 2,3

*) $p \vdash [\neg(q\to r)\to\neg p]\to(\neg r\to\neg q)$

1 (1)	p	S
2 (2)	$p\to(q\to r)$	S
3 (3)	$\neg(q\to r)$	S
2,3 (4)	$\neg p$	MT 2,3
2 (5)	$\neg(q\to r)\to\neg p$	PC 3,4
1,2 (6)	$q\to r$	MP 1,2
7 (7)	$\neg r$	S
1,2,7 (8)	$\neg q$	MT 6,7
1,2 (9)	$\neg r\to\neg q$	PC 7,8
1 (10)	$[\neg(q\to r)\to\neg p]\to(\neg r\to\neg q)$	PC 5,9

*) $p \wedge q\to r \vdash p\to (q\to r)$ (exportación)

1 (1)	$p \wedge q \rightarrow r$	S
2 (2)	p	S
3 (3)	q	S
2,3 (4)	$p \wedge q$	I$\wedge$ 2,3
1,2,3 (5)	r	MP 1,4
1,2 (6)	$q \rightarrow r$	PC 3,5
1 (7)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	PC 2,6

*) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash p \wedge q \rightarrow r$ (importación)

1 (1)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	S
2 (2)	$p \wedge q$	S
2 (3)	p	E$\wedge$ 2
2 (4)	q	E$\wedge$ 2
1,2 (5)	$q \rightarrow r$	MP 1,3
1,2 (6)	r	MP 4,5
1 (7)	$p \wedge q \rightarrow r$	PC 2,6

*) $p \vdash q \rightarrow p \wedge q$

1 (1)	p	S
2 (2)	q	S
1,2 (3)	$p \wedge q$	I$\wedge$ 1,2
1 (4)	$q \rightarrow p \wedge q$	PC 2,3

*) $p \wedge q \vdash q \wedge p$ (conmutativa de la conjunción)

1 (1)	$p \wedge q$	S
1 (2)	q	E$\wedge$ 1
1 (3)	p	E$\wedge$ 1
1 (4)	$q \wedge p$	I$\wedge$ 2,3

*) $p \wedge (q \wedge r) \vdash (p \wedge q) \wedge r$ (asociativa de la conjunción)

1 (1)	$p \wedge (q \wedge r)$	S
1 (2)	p	E$\wedge$ 1
1 (3)	$q \wedge r$	E$\wedge$ 1
1 (4)	q	E$\wedge$ 3
1 (5)	r	E$\wedge$ 3
1 (6)	$(p \wedge q)$	I$\wedge$ 2,4
1 (7)	$(p \wedge q) \wedge r$	I$\wedge$ 5,6

*) $p \rightarrow q \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge r$

1 (1)	$p \rightarrow q$	S
2 (2)	$p \wedge r$	S
2 (3)	p	E$\wedge$ 2
2 (4)	r	E$\wedge$ 2
1,2 (5)	q	MP 1,3
1,2 (6)	$q \wedge r$	I$\wedge$ 4,5
1 (7)	$p \wedge r \rightarrow q \wedge r$	PC 2,6

*) $p \rightarrow q,\ r \rightarrow s \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge s$

1(1)	$p \rightarrow q$	S
2 (2)	$r \rightarrow s$	S

3 (3)	$p \wedge r$	S
3 (4)	p	E$\wedge$ 3
3 (5)	r	E$\wedge$ 3
1,3 (6)	q	MP 1,4
2,3 (7)	s	MP 2,5
1,2,3 (8)	$q \wedge s$	I$\wedge$ 6,7
1,2 (9)	$p \wedge r \rightarrow q \wedge s$	PC 3,8

*) $(p\rightarrow q) \wedge (p\rightarrow r) \vdash p\rightarrow q \wedge r$ (distributiva del condicional en conjunción)

1 (1)	$(p\rightarrow q) \wedge (p\rightarrow r)$	S
1 (2)	$p\rightarrow q$	E$\wedge$ 1
1 (3)	$p\rightarrow r$	E$\wedge$ 1
4 (4)	p	S
1,4 (5)	q	MP 2,4
1,4 (6)	r	MP 3,4
1,4 (7)	$q \wedge r$	I$\wedge$ 5,6
1 (8)	$p\rightarrow q \wedge r$	PC 4,7

Ejercicios resueltos de lógica de predicados

*) $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \neg Ga \vdash \neg Fa$

1 (1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	S
2 (2)	$\neg Ga$	S
1 (3)	$Fa \rightarrow Ga$	(E$\forall$ 1)
1,2 (4)	$\neg Fa$	MT 2,3

*) $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow Fx) \vdash \forall x(Hx \rightarrow Gx)$

1 (1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	S
2 (2)	$\forall x(Hx \rightarrow Fx)$	S
1 (3)	$Fa \rightarrow Ga$	(E$\forall$ 1)
2 (4)	$Ha \rightarrow Fa$	(E$\forall$ 2)
5 (5)	Ha	S
2, 5 (6)	Fa	MP 4, 5
1, 2, 5 (7)	Ga	MP 3, 6
1, 2 (8)	$Ha \rightarrow Ga$	PC 5, 7
1, 2 (9)	$\forall x(Hx \rightarrow Gx)$	(I$\forall$ 8)

*) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall xFx \rightarrow \forall xGx$

1 (1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	S

2 (2)	$\forall x Fx$	S
1 (3)	$Fa \to Ga$	(E$\forall$ 1)
2 (4)	Fa	(E$\forall$ 2)
1, 2 (5)	Ga	MP 3, 4
1, 2 (6)	$\forall x Gx$	(I$\forall$ 5)
1 (7)	$\forall x Fx \to \forall x Gx$	PC 2, 6

*) $\forall x(Fx \to Hx), \exists x \neg Hx \vdash \exists x \neg Fx$

1 (1)	$\forall x(Fx \to Hx)$	S
2 (2)	$\exists x \neg Hx$	S
1 (3)	$Fa \to Ha$	(E$\forall$ 1)
4 (4)	$\neg Ha$	S
1, 4 (5)	$\neg Fa$	MT 3, 4
1, 4 (6)	$\exists x \neg Fx$	(I$\exists$ 5)
1, 2 (7)	$\exists x \neg Fx$	(E$\exists$ 2, 4, 6)

*) $\forall x \neg Hx \vdash \exists x \neg Hx$

1 (1)	$\forall x \neg Hx$	S
1 (2)	$\neg Ha$	(E$\forall$ 1)
1 (3)	$\exists x \neg Hx$	(I$\exists$ 2)

*) $\forall x(\neg Fx \to \neg Gx) \vdash \exists x \neg Fx \to \exists x \neg Gx$

1 (1)	$\forall x(\neg Fx \to \neg Gx)$	S
2 (2)	$\exists x \neg Fx$	S
1 (3)	$\neg Fa \to \neg Ga$	(E$\forall$ 1)
4 (4)	$\neg Fa$	S
1, 4 (5)	$\neg Ga$	MP 3, 4
1, 4 (6)	$\exists x \neg Gx$	(I$\exists$ 5)
1, 2 (7)	$\exists x \neg Gx$	(E$\exists$ 2, 4, 6)
1 (8)	$\exists x \neg Fx \to \exists x \neg Gx$	PC 2, 7

*) $\forall x Hx \vdash \forall y Hy$

1 (1)	$\forall x Hx$	S
1 (2)	Ha	(E$\forall$ 1)
1 (3)	$\forall y Hy$	(I$\forall$ 2)

Bibliografía

El estudiante interesado en ampliar sus conocimientos encontrará una selección bibliográfica en la guía correspondiente de la unidad enseñanza-aprendizaje de "Lógica". Como obra de consulta se recomienda Andrés Páez, *Introducción a la lógica moderna*, 2ª edición, Ediciones Uniandes, 2010.